

构造函数

一、单选题

1. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $3f(x) + xf'(x) > 0$, 则必有 ()

- A. $f(10) > 8f(20)$ B. $f(10) < 8f(20)$ C. $8f(10) < f(20)$
D. $f(10) < 4f(20)$

【答案】B

【详解】设 $g(x) = x^3 f(x)$, 则 $g'(x) = 3x^2 f(x) + x^3 f'(x) = x^2 [3f(x) + xf'(x)] > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $g(10) < g(20)$, 即 $1000f(10) < 8000f(20)$, 所以 $f(10) < 8f(20)$.

2. $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x) - f(x) < 0$, 对任意正数 a, b , 若 $a < b$, 则必有 ()

- A. $af(b) < bf(a)$ B. $bf(a) < af(b)$
C. $af(a) < bf(b)$ D. $bf(b) < af(a)$

【答案】A

【分析】构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 利用导数确定函数的单调性, 进而比较大小.

【详解】令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

又 $x > 0$, $xf'(x) - f(x) < 0$, 所以 $F'(x) < 0$, 函数 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

由 $0 < a < b$, 得 $F(a) > F(b)$, 即 $\frac{f(a)}{a} > \frac{f(b)}{b}$, 所以 $af(b) < bf(a)$.

3. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意实数 x , 有 $f(x) > f'(x)$, 且

$f(x) + 2026$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) + 2026e^x < 0$ 的解集是 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, \ln 2026)$ C. $(0, +\infty)$ D. $(2026, +\infty)$

【答案】C

【分析】构造辅助函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 利用导数判断其单调性, 再利用 $f(x) + 2026$ 为奇函数求出 $g(0)$ 的值, 从而将原不等式转化为关于 $g(x)$ 的不等式进行求解.

【详解】设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x},$$

因为 $f(x) > f'(x)$, 所以 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

因为 $f(x) + 2026$ 为奇函数,

$$\text{所以 } f(0) + 2026 = 0, \quad f(0) = -2026, \quad g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = -2026, \quad f(x) + 2026e^x < 0,$$

$$\text{即 } \frac{f(x)}{e^x} < -2026, \quad \text{即 } g(x) < g(0),$$

故 $x > 0$.

故选: C.

4. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f'(x) < 2x$, 且 $f(5) = 3$, 则不等式 $f(2x-1) + 4x > 4x^2 - 21$ 的解集是 ()

A. $(-\infty, 3)$

B. $(3, +\infty)$

C. $(0, 3)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

【答案】D

【分析】根据 $f'(x) < 2x$ 可构造函数 $g(x) = f(x) - x^2 (x > 0)$, 将 $f(2x-1) + 4x > 4x^2 - 21$ 转化为 $g(x)$ 的函数值间的大小比较, 根据导数研究 $g(x)$ 的单调性, 进而可得关于 x 的不等式, 解不等式即可.

【详解】设 $g(x) = f(x) - x^2 (x > 0)$, 则 $g'(x) = f'(x) - 2x$.

因为 $f'(x) < 2x$, 所以 $f'(x) - 2x < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

不等式 $f(2x-1) + 4x > 4x^2 - 21$ 等价于不等式 $f(2x-1) - (2x-1)^2 > -22$, 即 $g(2x-1) > -22$.

因为 $f(5) = 3$, 所以 $g(5) = f(5) - 5^2 = -22$, 所以 $g(2x-1) > g(5)$.

因为 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $0 < 2x-1 < 5$, 解得 $\frac{1}{2} < x < 3$.

5. 已知 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的可导函数, $f'(x)$ 为其导函数, 且 $f(x) < f'(x)$ 恒成立, 其中 e 是自然对数的底数, 则 ()

A. $f(2025) < ef(2026)$

B. $ef(2025) > f(2026)$

C. $ef(2025) = f(2026)$

D. $ef(2025) < f(2026)$

【答案】D

【分析】根据已知不等式的形式构造新函数，利用新函数导数的正负性判断新函数的单调性，利用函数的单调性进行判断即可.

【详解】构造新函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$,

所以 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上递增函数，

所以 $g(2026) > g(2025) \Rightarrow \frac{f(2026)}{e^{2026}} > \frac{f(2025)}{e^{2025}} \Rightarrow f(2026) > ef(2025)$.

故选：D

6. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 满足：对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $x > f'(x)$ ，若

$f(1+k) - f(1-k) \leq 2k$ ，则实数 k 的取值范围是（ ）

- A. $(-\infty, 0]$ B. $\left[-\infty, \frac{1}{2}\right]$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ D. $[0, +\infty)$

【答案】D

【分析】由 $x > f'(x)$ 构造 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ ，得到其单调性，对不等式变形后得到

$g(1+k) \leq g(1-k)$ ，从而由单调性解不等式，求出答案.

【详解】令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$ ，则 $g'(x) = f'(x) - x$ ，因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $x > f'(x)$ ，

所以 $g'(x) < 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

不等式 $f(1+k) - f(1-k) \leq 2k$ 等价于 $f(1+k) - \frac{1}{2}(1+k)^2 \leq f(1-k) - \frac{1}{2}(1-k)^2$ ，

即 $g(1+k) \leq g(1-k)$ ，所以 $1+k \geq 1-k$ ，解得 $k \geq 0$ ，

故选：D.

7. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，且 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) - f'(x) < 0$. 若关于 x 的不等式

$f(ax+3) > e^{ax+1}f(2)$ 在 $[-1, 2]$ 上恒成立，则 a 的取值范围为（ ）

- A. $[1, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $[-\frac{1}{2}, 1]$ D. $(-\frac{1}{2}, 1)$

【答案】D

【分析】根据给定条件，构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，利用导数确定单调性，结合恒成立求出范围.

【详解】令函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ ，求导得 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$ ，函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

不等式 $f(ax+3) > e^{ax+1} f(2) \Leftrightarrow \frac{f(ax+3)}{e^{ax+3}} > \frac{f(2)}{e^2}$ ，即 $g(ax+3) > g(2)$ ，则 $ax+3 > 2$ ，

依题意，不等式 $ax+3 > 2$ 在 $[-1, 2]$ 上恒成立，则 $\begin{cases} -a+3 > 2 \\ 2a+3 > 2 \end{cases}$ ，解得 $-\frac{1}{2} < a < 1$ ，

所以 a 的取值范围为 $(-\frac{1}{2}, 1)$ 。

故选：D

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $f(x) > f'(x)$ ， $f(0)=1$ ，则不等式 $f(x) > e^x$ 的解集为

()

A. $(1, +\infty)$

B. $(0, +\infty)$

C. $(-\infty, 1)$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】D

【分析】由 $f(x) > f'(x)$ 构造函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ ，由其单调性求解不等式。

【详解】因为 $f(x) > f'(x)$ ，即 $f'(x) - f(x) < 0$ ，构造函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ ，因为

$$\left[\frac{f(x)}{e^x} \right]' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0,$$

所以函数 $y = \frac{f(x)}{e^x}$ 是减函数，又由 $f(x) > e^x$ 可得 $\frac{f(x)}{e^x} > 1$ ，且 $\frac{f(0)}{e^0} = 1$ ，

所以原不等式即 $\frac{f(x)}{e^x} > \frac{f(0)}{e^0}$ ，解得 $x < 0$ ，

所以不等式 $f(x) > e^x$ 的解集为 $(-\infty, 0)$ ，

故选：D.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数， $f(2)=0$ ，当 $x > 0$ 时，有 $xf'(x) - f(x) < 0$ 恒成立，则

不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 ()

A. $(-2, 0) \cup (0, 2)$.

B. $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

【答案】D

【分析】设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ，即可得到 $g(x)$ 是偶函数，求导说明 $g(x)$ 的单调性，即可得

到 $g(x)$ 的取值情况, 从而得到 $f(x)$ 的取值情况.

【详解】设函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 可知 $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,

又因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

则 $g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = g(x)$, 所以 $g(x)$ 是偶函数,

又 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

因为当 $x > 0$ 时, 有 $xf'(x) - f(x) < 0$ 恒成立, 则 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f(2) = 0$, 可知 $g(2) = 0$,

则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $g(-2) = g(2) = 0$;

所以当 $x > 2$ 时, $g(x) < g(2) = 0$; 当 $0 < x < 2$ 时, $g(x) > g(2) = 0$;

当 $x < -2$ 时, $g(x) < g(-2) = 0$; 当 $-2 < x < 0$ 时, $g(x) > g(-2) = 0$;

所以当 $x < -2$ 时, $g(x) < 0$, $f(x) > 0$;

当 $-2 < x < 0$ 时, $g(x) > 0$, $f(x) < 0$;

当 $0 < x < 2$ 时, $g(x) > 0$, $f(x) > 0$;

当 $x > 2$ 时, $g(x) < 0$, $f(x) < 0$.

所以不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

故选: D

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(1) = -1$, 其导函数 $f'(x)$ 满足 $xf'(x) - 2f(x) > 0$,

则不等式 $f(x+2026) + (x+2026)^2 < 0$ 的解集为 ()

A. $(-\infty, -2025)$ B. $(0, 2025)$ C. $(-2026, +\infty)$ D. $(-2026, -2025)$

【答案】D

【分析】构造函数根据导数判断单调性, 结合单调性求解不等式即可.

【详解】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ ($x > 0$), 则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} > 0$, 所以 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则原不等式等价于 $\frac{f(x+2026)}{(x+2026)^2} < -1$, 因为 $f(1) = -1$, 所以 $g(1) = \frac{f(1)}{1^2} = -1$,

故 $g(x+2026) = \frac{f(x+2026)}{(x+2026)^2} < -1 = g(1)$, 所以 $0 < x+2026 < 1$,

解得 $-2026 < x < -2025$, 所以不等式 $f(x+2026) + (x+2026)^2 < 0$ 的解集为 $(-2026, -2025)$.

故选: D

11. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数, 导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) < f(x)$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 ()

A. $f(3) < e^2 f(0)$

B. $f(2) > e^2 f(0)$

C. $e^2 f(-1) > f(1)$

D. $e^2 f(-1) < f(1)$

【答案】C

【分析】构造函数, 利用导数判断单调性, 由单调性求解即可.

【详解】构造 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$,

因为导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) < f(x)$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以 $g'(x) < 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

$$\text{即 } g(2) < g(0) \Rightarrow \frac{f(2)}{e^2} < \frac{f(0)}{e^0} \Rightarrow f(2) < e^2 f(0),$$

$$g(3) < g(0) \Rightarrow \frac{f(3)}{e^3} < \frac{f(0)}{e^0} \Rightarrow f(3) < e^3 f(0),$$

$$g(-1) > g(1) \Rightarrow \frac{f(-1)}{e^{-1}} > \frac{f(1)}{e} \Rightarrow e^2 f(-1) > f(1),$$

故选: C

12. 已知偶函数 $f(x)$ ($x \neq 0$) 的导函数为 $f'(x)$, 且满足 $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $2f(x) > xf'(x)$,

则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$

B. $(-1, 0)$

C. $(0, 1)$

D. $(-1, 1)$

【答案】A

【分析】构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 其中 $x \neq 0$, 利用导数分析该函数在 $(0, +\infty)$ 上的单调性,

可知函数 $F(x)$ 为偶函数, 且 $F(1) = 0$, 将所求不等式变形为 $F(x) > F(1)$, 可得出

$F(|x|) > F(1)$, 可得出关于 x 的不等式组, 解之即可.

【详解】构造函数 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 其中 $x \neq 0$, 则 $F'(x) = \frac{x^2 f'(x) - 2xf'(x)}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$,

当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - 2f(x) < 0$, 此时 $F'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} < 0$,

故函数 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

因为函数 $f(x)$ 为偶函数, 即对任意的 $x \neq 0$, $f(-x) = f(x)$,

所以 $F(-x) = \frac{f(-x)}{(-x)^2} = \frac{f(x)}{x^2} = F(x)$, 故函数 $F(x)$ 为偶函数,

因为 $f(-1) = 0$, 则 $f(1) = 0$, 所以 $F(1) = \frac{f(1)}{1^2} = 0$,

由 $f(x) > 0$ 可得 $F(x) = \frac{f(x)}{x^2} > 0 = F(1)$, 即 $F(|x|) > F(1)$,

所以 $\begin{cases} |x| < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$, 解得 $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$,

故原不等式的解集为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

故选: A.

13. 若函数 $f(x)$ 定义在 $(0, +\infty)$ 上且可导, $f(x) < xf'(x)$ 则 ()

A. $ef(1) < f(e)$ B. $ef(1) > f(e)$ C. $ef(1) = f(e)$ D. $f(1) = f(e)$

【答案】A

【分析】先构造函数 $y = \frac{f(x)}{x}$, 再由已知结合导函数运算律构造函数的导函数, 再根据导函数得出函数单调性列式求解.

【详解】根据 $f(x) < xf'(x)$ 可得 $xf'(x) - f(x) > 0$,

可知当 $x > 0$ 时, $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$, 即 $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' > 0$,

所以可知函数 $y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数, 即 $\frac{f(1)}{1} < \frac{f(e)}{e}$,

从而得 $ef(1) < f(e)$,

故选: A.

14. 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 满足任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = -f(x)$, 且 $x \in (0, 4]$ 时, 有

$f'(x) < \frac{f(x)}{x}$, 则 $f(2024)$ 、 $4f(2025)$ 、 $2f(2026)$ 的大小关系是 ()

- A. $2f(2026) < f(2024) < 4f(2025)$ B. $2f(2026) > f(2024) > 4f(2025)$
C. $4f(2025) < 2f(2026) < f(2024)$ D. $4f(2025) > 2f(2026) > f(2024)$

【答案】D

【分析】根据给定条件可得函数 $f(x)$ 的周期为 4, 再构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 利用导数分析单调性即可判断得解.

【详解】由任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = -f(x)$, 得 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$, 则 $f(x)$ 是周期为 4 的函数,

于是 $f(2024) = f(4)$, $f(2025) = f(1)$, $f(2026) = f(2)$, 令函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}, x \in (0, 4]$,

而当 $x \in (0, 4]$ 时, $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$, 因此 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$, 即函数 $g(x)$ 在 $(0, 4]$ 上单调递减,

则 $g(1) > g(2) > g(4)$, 即 $f(1) > \frac{f(2)}{2} > \frac{f(4)}{4}$, 因此 $f(2025) > \frac{f(2026)}{2} > \frac{f(2024)}{4}$,

所以 $4f(2025) > 2f(2026) > f(2024)$.

故选: D

15. 已知函数 $y = f(x-2)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称, 函数 $y = f(x)$ 对于任意的 $x \in (0, \pi)$ 满足 $f'(x)\cos x > f(x)\sin x$ (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 则下列不等式成立的是 ()

- A. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ B. $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$
C. $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ D. $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right) > f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

【答案】D

【分析】根据题意可知函数 $f(x)$ 为奇函数, 令 $F(x) = f(x)\cos x$, 得到

$F'(x) = f'(x)\cos x - f(x)\sin x > 0$, 则函数 $F(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, 结合奇偶性即可逐项判断.

【详解】 $\because y = f(x-2)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 对称,

$\therefore y = f(x)$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 对称, 即函数 $f(x)$ 为奇函数,

$\because f'(x)\cos x > f(x)\sin x, \therefore f'(x)\cos x - f(x)\sin x > 0$,

令 $F(x) = f(x)\cos x$, $x \in (0, \pi)$,

则 $F'(x) = f'(x)\cos x - f(x)\sin x > 0$,

即函数 $F(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增,

又函数 $f(x)$ 为奇函数, $y = \cos x$ 为偶函数,

所以函数 $F(x)$ 为奇函数,

$$\therefore -F\left(-\frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) > F\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{ 即 } -f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6},$$

整理得 $-f\left(-\frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right), \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的大小无法确定, 故 AB 错误;

$$\therefore -F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) > F\left(\frac{\pi}{6}\right), \text{ 即 } -f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > f\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6},$$

整理得 $-\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$, 则 $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right), \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的大小无法确定, 故 C 错误;

$$\therefore F\left(\frac{\pi}{4}\right) < F\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{ 即 } -F\left(-\frac{\pi}{4}\right) < -F\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\therefore F\left(-\frac{\pi}{4}\right) > F\left(-\frac{\pi}{3}\right), \text{ 即 } f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) > f\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

整理得 $\sqrt{2}f\left(-\frac{\pi}{4}\right) > f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, 故 D 正确.

故选: D.

16. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线, 且 $f(-x) + f(x) = 0$, 若

当 $x > 0$ 时, $[f(x) + f'(x)]e^x > [f(x) - f'(x)]e^{-x}$, 则 ()

A. $f(e) < f(-e)$

B. $xf'(x) \leq 0$

C. $f(x)$ 存在极值点

D. $f(x)$ 有且只有一个零点

【答案】D

【分析】构造函数 $g(x) = f(x)e^x + f(x)e^{-x}$, 通过分析 $g(x)$ 的单调性进而得到函数 $f(x)$ 的正负, 然后逐项分析即得.

【详解】 $\because f(-x) + f(x) = 0$, 即 $f(-x) = -f(x)$, 故函数 $f(x)$ 为奇函数,

设 $g(x) = f(x)e^x + f(x)e^{-x} = f(x)(e^x + e^{-x})$, 则

$$g'(x) = [f'(x) + f(x)]e^x + [f'(x) - f(x)]e^{-x},$$

由题意, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) = [f'(x) + f(x)]e^x + [f'(x) - f(x)]e^{-x} > 0$,

$\therefore g(x) = f(x)(e^x + e^{-x})$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $\because e^x + e^{-x}$ 为偶函数, 故 $g(x)$ 为奇函数,

$\therefore g(x) = f(x)(e^x + e^{-x})$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, $g(x)$ 图象连续不断且 $g(0) = 0$,

$\therefore g(x) = f(x)(e^x + e^{-x})$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$\therefore$ 当 $x > 0$ 时, $e^x + e^{-x} > 0, g(x) > 0, \therefore f(x) > 0$; 同理当 $x < 0$ 时, $\therefore f(x) < 0$,

对于 A, $g(e) = f(e)(e^e + e^{-e}), g(-e) = f(-e)(e^{-e} + e^e), \therefore g(e) > g(-e), \therefore f(e) > f(-e)$,
故 A 错误.

对于 B, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 则 $xf(x) > 0$, 故 B 错误.

对于 C, 由于函数 $f(x)$ 的单调性未知, 故该选项不确定, 故 C 错误.

对于 D, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(0) = 0, \therefore f(x)$ 有且只有一个零点, 故 D 正确.

17. 已知函数 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 对任意 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $f'(x) + f(x)\tan x > 0$, 则下

列结论正确的是 ()

A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

B. $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

C. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

D. $\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

【答案】D

【分析】令 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$, 根据已知条件, 可判断 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

据此可判断 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) < g\left(\frac{\pi}{4}\right) < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 进而得出 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$,

$\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{6}\right) < \sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 选出正确答案.

【详解】因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos x > 0$.

由 $f'(x) + f(x)\tan x > 0$, 得 $f'(x) + \frac{f(x)\sin x}{\cos x} > 0$,

所以 $\frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x} > 0$.

令 $g(x) = \frac{f(x)}{\cos x}$, 则 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

所以 $g(\frac{\pi}{6}) < g(\frac{\pi}{4}) < g(\frac{\pi}{3})$, 即 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\cos \frac{\pi}{6}} < \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\cos \frac{\pi}{4}} < \frac{f(\frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\pi}{3}}$, 即 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} < \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} < \frac{f(\frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}}$

即 $\frac{f(\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}} < \frac{f(\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}} < f(\frac{\pi}{3})$.

所以 $f(\frac{\pi}{6}) < \sqrt{3}f(\frac{\pi}{3}), \sqrt{2}f(\frac{\pi}{6}) < \sqrt{3}f(\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{4}) < \sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$.

因为不能判断 $f(\frac{\pi}{6}), f(\frac{\pi}{4}), f(\frac{\pi}{3})$ 的取值, 所以 A 错误, B, C 不能确定, 只有 D 选项一定正确.

故选: D.

18. 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-5, 0) \cup (0, 5)$ 的偶函数, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - 2f(x) < 0$, 且

$f(2) = 0$, 则 $(x-1)f(x) > 0$ 的解集为 ()

A. $(-5, -2) \cup (1, 2)$

B. $(-2, -1) \cup (2, 5)$

C. $(-5, -2) \cup (2, 5)$

D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

【答案】A

【分析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 利用导数, 结合题目所给条件可得 $g(x)$ 单调性及其奇偶性,

再利用 $f(2) = 0$, 可得 $g(2) = 0$, 则可得 $f(x) < 0$ 及 $f(x) > 0$ 时的 x 的取值范围, 再分

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ x-1 > 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ x-1 < 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$ 计算即可得解.

【详解】令 $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, 则 $g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x^2 - f(x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$,

由 $x > 0$ 时, $xf'(x) - 2f(x) < 0$, 故 $g'(x) = \frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3} < 0$,

即 $g(x)$ 在 $(0, 5)$ 上单调递减, 又 $f(x)$ 为偶函数, 则 $g(-x) = \frac{f(-x)}{(-x)^2} = \frac{f(x)}{x^2} = g(x)$,

则 $g(x)$ 也是定义在 $(-5, 0) \cup (0, 5)$ 的偶函数,

由 $f(2) = 0$, 则 $g(2) = \frac{f(2)}{4} = 0$,

则当 $x \in (-5, -2) \cup (2, 5)$ 时, $g(x) < 0$, 且 $f(x) < 0$,

当 $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$ 时, $g(x) > 0$, 且 $f(x) > 0$,

令 $(x-1)f(x) > 0$, 则有 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ x-1 > 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ x-1 < 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$,

对 $\begin{cases} f(x) > 0 \\ x-1 > 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$, 解得 $1 < x < 2$; 对 $\begin{cases} f(x) < 0 \\ x-1 < 0 \\ 0 < |x| < 5 \end{cases}$, 解得 $-5 < x < -2$,

故 $(x-1)f(x) > 0$ 的解集为 $(-5, -2) \cup (1, 2)$.

故选: A.

19. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意实数 x , 有 $f(x) > f'(x)$, 且

$f(x) + 2026$ 为奇函数, 则不等式 $f(x) + 2026e^x > 0$ 的解集是 ()

A. $(-\infty, 0)$

B. $(-\infty, \ln 2026)$

C. $(0, +\infty)$

D. $(2026, +\infty)$

【答案】A

【分析】由题意, 构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 由条件判断 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 由奇函数求出 $g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = -2026$, 将所求不等式转化为 $g(x) > g(0)$, 利用单调性即可求解.

【详解】 $\because f(x) > f'(x)$, $\therefore f'(x) - f(x) < 0$, $\therefore \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} < 0$,

$\therefore \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' < 0$, 设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

$\because f(x) + 2026$ 为奇函数, $\therefore f(0) + 2026 = 0$, $\therefore f(0) = -2026$,

$\therefore g(0) = \frac{f(0)}{e^0} = -2026$, 不等式 $f(x) + 2026e^x > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} > -2026$,

即 $g(x) > g(0)$, 解得 $x < 0$. 即该不等式的解集为 $(-\infty, 0)$.

故选: A.

20. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = e$, 且 $f'(x) - f(x) < 0$, 则不等式 $f(x+1) > e^{x+1}$ 的解集是 ()

A. $(2, +\infty)$

B. $(-\infty, 2)$

C. $(0, +\infty)$

D. $(-\infty, 0)$

【答案】D

【分析】构造函数，通过求导研究单调性，利用单调性解不等式.

【详解】设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$, 因为 $f'(x) - f(x) < 0$, 所以 $g'(x) < 0$, $g(x)$

在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

$g(1) = \frac{f(1)}{e} = 1$, $g(x) > 1 = g(1)$ 的解为 $x < 1$,

即 $\frac{f(x)}{e^x} > 1$ 的解为 $x < 1$, 即 $f(x) > e^x$ 的解为 $x < 1$,

$f(x+1) > e^{x+1}$ 解为 $x+1 < 1, x < 0$.

故选: D